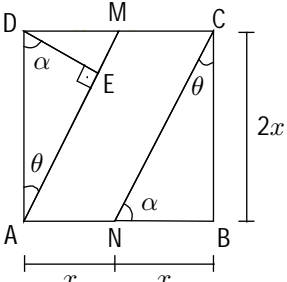
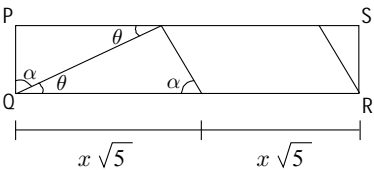
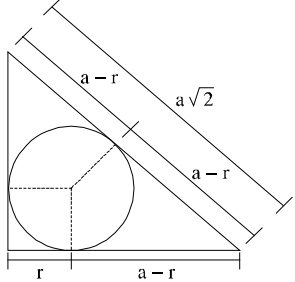


PADRÃO DE RESPOSTAS

(VALOR DE CADA QUESTÃO = 2 PONTOS)

Questão	Resposta
<p>1</p>	<p>(12.000, 11.400, 10.800, ..., <math>a_n</math>, ...) P.A.  <math>a_1 = 12.000</math> e <math>r_a = -600</math>                      (300, 600, 900, ..., <math>b_n</math>, ...) P.A.  <math>b_1 = 300</math> e <math>r_b = 300</math>  <math>a_n = b_n</math>  <math>\Rightarrow a_1 + (n-1)r_a = b_1 + (n-1)r_b</math>  <math>\Rightarrow 12.000 + (n-1)(-600) = 300 + (n-1)(300)</math>  <math>\Rightarrow 12.000 - 300 = (n-1)(600 + 300)</math>  <math>\Rightarrow 11.700 = (n-1)900</math>  <math>\Rightarrow 13 = n - 1</math>  <math>\Rightarrow n = 14</math>  <math>\Rightarrow 1</math> ano + 2 meses  <math>\Rightarrow</math> fevereiro de 2011</p>
<p>2</p>	 <p><math>\overline{CN}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{CN}^2 = x^2 + 4x^2 \Rightarrow \overline{CN} = x\sqrt{5}</math></p> <p><math>\overline{MC} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{MC} = x</math></p> <p>A seguinte relação é válida para o triângulo ADM:</p> <p><math>x\sqrt{5} \times \overline{DE} = 2x^2 \Rightarrow \overline{DE} = \frac{2x}{\sqrt{5}}</math></p>  <p>Como <math>\overline{PQ} = \overline{DE}</math>, pode-se obter a razão:</p> <p><math>\frac{\overline{PS}}{\overline{PQ}} = \frac{2x\sqrt{5}}{\frac{2x}{\sqrt{5}}} = 5</math></p>
<p>3</p>	<p><math>n = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20</math></p> <hr/> <p><math>m = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10</math></p> <p>Logo: <math>n - m = 20 - 10 = 10</math></p>

4	$\frac{1}{2} = \frac{12+n}{12+n+15}$ $\Rightarrow 12+n+15 = 2(12+n) \Rightarrow n+27 = 24+2n \Rightarrow 27-24 = 2n-n \Rightarrow n=3$
5	 <p>Relação entre a aresta <math>a</math> do cubo e o raio <math>r</math> do cilindro:</p> $2a - 2r = a\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2} \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}$ <p>Logo: <math>V_{(\text{cilindro})} = \pi r^2 \times a</math> e <math>V_{(\text{cubo})} = a^3</math></p> <p>Assim: <math>\frac{V_{(\text{cilindro})}}{V_{(\text{cubo})}} = \frac{\pi r^2 \times a}{a^3} = \pi \times \left(\frac{r}{a}\right)^2 = \pi \frac{(2-\sqrt{2})^2}{4}</math></p>
6	$A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab} \text{ e } H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ <p>A seqüência (A, G, H) é uma P.G. de razão <math>q = \frac{\sqrt{3}}{2}</math>.</p> $G = A \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ $ab = \frac{3(a+b)^2}{16} \Rightarrow 16ab = 3(a^2 + 2ab + b^2) \Rightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0$ $\Rightarrow a = \frac{10b \pm \sqrt{(-10b)^2 - 4 \times 3 \times (3b^2)}}{2 \times 3} = \frac{10b \pm \sqrt{100b^2 - 36b^2}}{6} = \frac{10b \pm 8b}{6}$ $\Rightarrow a = 3b \text{ ou } a = \frac{2}{3}b$ <p><math>a</math> e <math>b</math> são números reais positivos com <math>a &gt; b</math>, logo: <math>\frac{a}{b} = 3</math>.</p>
7	$\overline{PC} = \overline{AQ} = y$ $\overline{AD} = \overline{DP} = x$ $2y + 4x = 800 \Rightarrow y + 2x = 400 \Rightarrow y = 400 - 2x$ $S = yx = (400 - 2x)x = -2x^2 + 400x$ <p>Logo:</p> $S_{\text{máxima}} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(160000 - 0)}{-8} = 20.000 \text{ m}^2$

8	<p>Sejam:  <math>x</math> = número de atletas que marcaram 13 gols  <math>y</math> = número de atletas que marcaram 14 gols  <math>z</math> = número de atletas que marcaram 15 gols</p> <p>Logo:  <math>13x + 14y + 15z = 125</math>  <math>y + z = 5 \Rightarrow z = 5 - y</math> e <math>0 \leq y \leq 5</math>  <math>13x + 14y + 15(5 - y) = 125 \Rightarrow 13x + 14y + 75 - 15y = 125</math>  <math>\Rightarrow 13x - y = 50 \Rightarrow 13x - 50 = y</math></p> $0 \leq y \leq 5 \Rightarrow 0 \leq 13x - 50 \leq 5 \Rightarrow 50 \leq 13x \leq 55 \Rightarrow \frac{50}{13} \leq x \leq \frac{55}{13} \Rightarrow x = 4$ <p>Portanto:  <math>y = 13x - 50 = 13 \times 4 - 50 = 2</math>  <math>z = 5 - y = 3</math>  O número de atletas que fizeram 15 gols é igual a 3.</p>
9	<p><math>\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) = k</math>  <math>\log_9 x = k \Rightarrow 9^k = x</math>  <math>\log_6 y = k \Rightarrow 6^k = y</math>  <math>\log_4 (x + y) = k \Rightarrow 4^k = (x + y)</math></p> $4^k = 9^k + 6^k \Rightarrow 4^k - 6^k - 9^k = 0 \Rightarrow (2^k)^2 - 3^k(2^k) - 3^{2k} = 0$ <p>Considerando <math>z = 2^k</math>:</p> $z^2 - 3^k z - 3^{2k} = 0 \Rightarrow z = \frac{3^k \pm \sqrt{3^{2k} + 4 \times 3^{2k}}}{2} = \frac{3^k \pm 3^k \sqrt{5}}{2}$ <p>Como <math>z</math> é positivo:</p> $z = \frac{3^k + 3^k \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{2^k}{3^k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ <p>Portanto:</p> $\frac{y}{x} = \frac{6^k}{9^k} = \left(\frac{6}{9}\right)^k = \frac{2^k}{3^k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Substitui-se  $z^3$  por  $y$  na equação  $z^6 + z^3 + 1 = 0$ :

$$y^2 + y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ou } y_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Para determinar as raízes cúbicas de um número complexo  $w = \rho (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ , usa-se a seguinte relação:

$$w_k = \sqrt[3]{\rho} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], k \in \{0, 1, 2\}.$$

Portanto, as raízes cúbicas do número complexo  $y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \left( \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \right)$

são determinadas por:

10

$$w_0 = \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right) \right], w_1 = \left[ \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{9}\right) \right], w_2 = \left[ \cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{14\pi}{9}\right) \right]$$

Analogamente, as raízes cúbicas do número complexo  $y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \left( \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \right)$

são determinadas por:

$$w_3 = \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right], w_4 = \left[ \cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{9}\right) \right], w_5 = \left[ \cos\left(\frac{16\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{16\pi}{9}\right) \right]$$

Como  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,

$$\theta = \arg(w_1) = \frac{8\pi}{9}$$